点推定法を用いた骨組終局耐力の確率モーメント算定に関する一考察

指導教官　井戸田　秀樹　助教授　　　　　　　　　　　　　　小島邦裕

1.　序

構造システムの実用的な信頼性解析手法として、点推定法を応用した骨組構造物の終局耐力に関する確率モーメント評価手法が提案されている[1）]。点推定法は確率分布形により決まる確率モーメントを入力データとし、数回の確定論的な計算で関数値のモーメントを計算するものであるが、入出力で考慮すべき確率モーメントの次数と解析精度は対象とする限界状態関数に大きな影響を受けるため、この影響を考慮して解析結果を評価する必要がある。そこで、本研究では骨組の終局耐力と終局耐力時の変形を対象に、点推定法を用いる上で考慮すべき確率モーメントと解析精度について考察を行うものである。

２．点推定法を用いた確率モーメント評価

3 Point Estimate 法（以下3 Point 法と呼ぶ）は推定点を３点に限定し、それぞれに重みをつけて扱う方法である。各推定点X_-,X_0,X_+と重みP_-,P_0,P_+は確率変数Xの４次までの確率モーメント$\mu_X,\sigma_X,\alpha_{3X},\alpha_{4X}$より定義される。各推定点での計算結果は以下の２つのStepを経ることによりシステムの確率モーメントとして評価される。

Ｓｔｅｐ１：構造システムの性能関数を$Y = g(X_1,X_2,\dots,X_n)$とすると、１つの確率変数X_iのみが確率量と仮定したときの関数値Y_iにおける確率モーメントはX_{i-},X_{i0},X_{i+}の３点についてY_{i-}=g$(\mu_1,\dots,X_i^-,\dots,\mu_n)$,$Y_{i0}$=g$(\mu_1,\dots,X_i^0,\dots,\mu_n)$,$Y_{i+}$=g$(\mu_1,\dots,X_i^+,\dots,\mu_n)$という３回の確定論的な計算をすれば求められる。このとき関数値Y_iの平均値μ_{Yi},分散$\sigma_{yi}{}^2$及びn次モーメントα_{Yi}は次式で求められる。

$$\mu_{Yi} = P_{i-}Y_{i-} + P_{i0}Y_{i0} + P_{i+}Y_{i+} \tag{1}$$

$$\sigma_{Yi}{}^2 = P_{i-}\left(Y_{i-} - \mu_{Yi}\right)^2 + P_{i0}\left(Y_{i0} - \mu_{Yi}\right)^2 + P_{i+}\left(Y_{i+} - \mu_{Yi}\right)^2 \tag{2}$$

$$\sigma_{yi}{}^n\alpha_{nYi} = P_{i-}\left(Y_{i-} - \mu_{Yi}\right)^n + P_{i0}\left(Y_{i0} - \mu_{Yi}\right)^n + P_{i+}\left(Y_{i+} - \mu_{Yi}\right)^n \tag{3}$$

Step２：Yの確率モーメントは、確率変数が単独でばらついたときの結果Y_iからｇの近似関数を用いて評価する必要がある。ここでは、終局耐力と終局時の変形について４次までのモーメントを用いて確率モーメントを評価する。

$$\mu_Y = u\sum_{i=1}^{n}\left(\mu_{Yi} - g^*\right) + g^* \tag{4}$$

$$\sigma^2{}_Y = t/q^2\sum_{i=1}^{n}\sigma_{Yi}{}^2 \tag{5}$$

$$\delta_H^3\alpha_{3H} + 1 + 3\delta_H^2 = \prod_{i=1}^{n}\left(\alpha_{3i}\delta_{Yi}^3 + 1 + 3\delta_{Yi}^2\right) \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\delta_H^4\alpha_{4H} &+ 4\delta_H^3\alpha_{3H} + 1 + 6\delta_H^2 \\ &= \prod_{i=1}^{n}\left(\alpha_{4i}\delta_{Yi}^4 + 4\alpha_{3i}\delta_{Yi}^3 + 1 + 6\delta_{Yi}^2\right)\end{aligned} \tag{7}$$

ここに$t = 1 + (\upsilon - 1)(1-\rho)$, $q = 1 + \left(\sqrt{n} - 1\right)\rho$であり、$\rho$は確率変数間の相関係数、δは変動係数である。また各推定点は相関係数の影響を考慮して評価している。

３．確率モーメントの精度に関する考察

３.１ 解析モデル

多層多スパン門型ラーメンの終局時の耐力と変形を解析対象とする。各部材の降伏応力度を確率量として扱い、その統計量は表１に示す３分布形を想定する。また各骨組はすべて梁崩壊先行形式の全体崩壊型骨組とする。骨組の解析はヒンジ法に基づく２次弾塑性解析手法を利用したプログラムを用いて行う[2）]。これは骨組を弾性領域と塑性領域に分け

表１　降伏応力度の諸量

(t/cm²)	平均値	標準偏差	３次確率モーメント	４次確率モーメント
正規分布	3.69	0.35	0.00	3.00
対数正規分布	3.69	0.35	0.29	3.15
ガンマ分布	3.69	0.35	0.19	3.05

表２　終局時の変形の確率モーメント

		相関係数=0.0		相関係数=0.5		相関係数=1.0	
		3 Point法	M C法	3 Point法	M C法	3 Point法	M C法
正規分布	平均値	23.7	23.2	23.7	21.6	19.8	18.8
	標準偏差	7.16	6.98	4.15	4.99	1.60	1.79
	３次確率モーメント	7.13	2.20	7.13	1.60	2.47	0.00
	４次確率モーメント	-160	11.9	-160	4.85	-174	3.00
対数正規分布	平均値	24.9	23.2	21.4	21.6	19.8	18.8
	標準偏差	6.08	6.98	3.02	4.90	1.58	1.79
	３次確率モーメント	2.35	2.09	4.41	1.54	2.71	0.29
	４次確率モーメント	-139	10.7	-174	4.09	-183	3.15
ガンマ分布	平均値	24.9	23.2	23.9	21.5	19.8	18.8
	標準偏差	6.14	7.12	4.30	4.84	1.60	1.79
	３次確率モーメント	2.30	2.56	7.14	1.45	2.64	0.19
	４次確率モーメント	-136	17.3	-155	3.46	-179	3.05

ＭＣ法=モンテカルロ法

て計算を行うもので、弾性領域では骨組全体の剛性マトリックスを用いて塑性ヒンジとなる剛域端を検出し、塑性ヒンジができるまでの増分外力の計算を行う。そして塑性領域では前のステップまでに塑性ヒンジが発生した剛域端をピン接合として、新しい骨組として計算を行う。

３.２ 解析結果における確率モーメントの考察

前節で述べたプログラムを使用し降伏応力度を変化させ3 Point 法とモンテカルロ法をそれぞれ実行させた結果の分布形別の平均値、標準偏差、３次、４次確率モーメントを表２に記す。それによるとモンテカルロ法において降伏応力度の分布形を考慮して試行した結果と3 Point 法を比較すると、平均値、標準偏差については高い精度で結果が得られている。しかし３次、４次確率モーメントに関してはばらつきが大きく精度が安定しないという欠点がある。

４．確率モーメント情報の選択に関する考察

確率分布形状の情報となる３次以上の確率モーメントの精度上の問題から、ここではモンテカルロシミュレーションによって骨組の終局状態に関わる確率分布形について検定を行う。

４.１ 終局耐力時の確率分布形に関する考察

表３は多層多スパン門型ラーメン構造物においてその層数やスパン数を変化させ、またそれぞれについて相関係数を２種類考え、表１の統計量の３種類について検定を行った結果である。ここでは適合度の検定法としてKolmogorov-Smirnov検定を用いて検定を行う。降伏応力度の確率分布形状に関わらず終局耐力では正規分布、終局耐力時の変形では対数正規分布の適合度が高い。

４ ２確率モーメントを用いた終局時の耐力・変形の上・下限値

前節での結果を基に3 Point 法の平均値・標準偏差の値を用い耐力については正規分布、変形については対数正規分布を想定して、非超過確率９５％に相当する限界値を計算したものが下の表４である。これによると3 Point 法の平均値と標準偏差を用いた結果はモンテカルロ法による結果と良い対応を示しており、3 Point 法で計算される確率モーメントの情報としては平均値と標準偏差のみを選択することで充分な精度が得られることを示した。

表３　終局時の耐力と変形に関する検定結果

	相関係数	分布形	終局時の耐力	終局時の変形
１層１スパン	0.0	正規分布	N	N,L-N
		対数正規分布	N	N
		ガンマ分布	N,L-N	N
	0.5	正規分布	N	N
		対数正規分布	N,L-N	N,L-N
		ガンマ分布	N	N,L-N
３層１スパン	0.0	正規分布	N	N
		対数正規分布	N	N
		ガンマ分布	N	N
	0.5	正規分布	N	N
		対数正規分布	N	N
		ガンマ分布	N	N
５層１スパン	0.0	正規分布	N	L-N
		対数正規分布	N	N,L-N
		ガンマ分布	N	L-N
	0.5	正規分布	N	L-N
		対数正規分布	N	N,L-N
		ガンマ分布	N	L-N
６層３スパン	0.0	正規分布	N	L-N
		対数正規分布	N	L-N
		ガンマ分布	N	L-N
	0.5	正規分布	N	L-N
		対数正規分布	N	L-N
		ガンマ分布	N	L-N

N=Normal,L-N=Log-normal,G=Gamma

表４　終局時の非超過確率95%の耐力と変形

		相関係数=0		相関係数=0.5	
		3 Point法	ＭＣ法	3 Point法	ＭＣ法
正規分布	耐力	59.5	59.5	59.5	57.2
	変形	34.5	35.8	29.8	31.5
対数正規分布	耐力	61.8	59.7	59.6	57.5
	変形	34.5	35.9	29.6	31.3
ガンマ分布	耐力	61.7	59.5	59.6	57.2
	変形	34.5	35.8	29.6	30.8

5.　結論

１）点推定法の解析精度はStep１よりStep２での精度に大きく依存する。

２）梁崩壊型多層多スパン骨組の終局状態に関しては、耐力を正規分布、変形を対数正規分布と仮定し、3 Point 法で求められる平均値と標準偏差を用いることで高い精度で確率的な評価ができる。

【参考文献】

１）井戸田秀樹, 小野徹郎, 早川由則：高次不静定骨組の信頼性解析法に関する研究, JCOSSAR ’91　論文集

２）W.F.Chen,I.Sohal：Plastic Design and Second-Order Analysis of Steel Frames,Springer-Verlag,1994

３）小野徹郎, 井戸田秀樹, 河原弘明, 高次積率を用いた高圧縮材および曲げ材の抵抗強度に関する統計論的研究,　日本建築学会構造系論文報告集, 第３７０号,1986.12.