

サンプルサイズを考慮した高次モーメント信頼性評価手法の提案

指導教官 井戸田 秀樹 助教授

和佐 智史

1. 序論

高次モーメント法は、確率密度関数を用いず確率変数のモーメント情報だけで破壊確率を評価する手法である。既知の確率分布形にフィットしない確率変数でも非正規性まで含めて容易に破壊確率を評価できることなど、実用性の高い破壊確率評価手法である。しかし、高次の確率モーメントは観測データのサンプルサイズに大きく依存するため、解析精度はサンプルサイズとの関係で議論される必要があり、サンプルサイズに係わらず安定した精度を持つ高次モーメント信頼性評価手法が必要である。

本研究では、幾つかの高次モーメント信頼性評価手法を対象にサンプルサイズと解析精度の関係を検討し、サンプルサイズに係わらず高い精度を持つ高次モーメント信頼性評価手法を提案する。

2. モンテカルロ法に基づく破壊確率の計算方法

2-1 既往の高次モーメント信頼性評価手法

本研究では、7つの信頼性評価手法について、その精度とサンプルサイズとの関係を検討した。そのうち、代表的な5つの信頼性評価手法を表1に示す。

2-2 計算方法

本研究では、信頼性評価手法の精度を検討することが目的であるため、限界状態関数は最も基本的な下式とした。ここで、 R は抵抗強度、 S は荷重である。

$$Z = R - S \quad (1)$$

次に、抵抗強度と荷重の確率モデルに従う乱数をそれぞれ準備し、任意のサンプル($x_i, i=1, 2, \dots, N, N$: サンプルサイズ)を取り出す。取り出したサンプルから、平均値、標準偏差、3次、4次モーメントを求める。3次、4次モーメントの算出には下式を用いた²⁾³⁾。

$$\alpha_m = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^m}{N\sigma^m} \quad (2)$$

ここに、 m はモーメントの次数、 μ, σ は N 個のサンプルから求めた平均値と標準偏差である。

続いて、限界状態関数の平均値、標準偏差、3次、4

次モーメント、 $\mu_Z, \sigma_Z, \alpha_{3Z}, \alpha_{4Z}$ を次式から求める²⁾³⁾。

$$\begin{aligned} \mu_Z &= \mu_R - \mu_S \\ \sigma_Z &= \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \\ \alpha_{3Z} &= \frac{\alpha_{3R}\sigma_R^3 + \alpha_{3S}\sigma_S^3}{\sigma_Z^3} \\ \alpha_{4Z} &= \frac{\alpha_{4R}\sigma_R^4 + \alpha_{4S}\sigma_S^4 + 6\sigma_R^2\sigma_S^2}{\sigma_Z^4} \end{aligned} \quad (3)$$

ここに、 $\mu_S, \sigma_S, \alpha_{3S}, \alpha_{4S}, \mu_R, \sigma_R, \alpha_{3R}, \alpha_{4R}$ は荷重、抵抗強度の平均値、標準偏差、3次、4次モーメントである。

3. 解析精度の評価手法

図1に式(3)から求めた限界状態関数の平均値、変動係数、3次、4次モーメントとサンプルサイズ N との関係を示す。また、100,000回の試行より得られたモンテカルロ法による平均値、標準偏差、3次、4次モーメントを精算値 $\mu_{EX}, \sigma_{EX}, \alpha_{3EX}, \alpha_{4EX}$ とし、図中に併記した。いずれのモーメントも N が増加するに従って精算値近傍に収束していくが、次数が高いほど収束が遅い。図1で示した4次までのモーメントを用いて、各手法から信頼性指標 β を求め、 β の精度を検討するために、モンテカルロ法の解を精算値 β_{EX} とし、 β の相対誤差 E を次式を用いて算出した。

$$E = \frac{\beta - \beta_{EX}}{\beta_{EX}} \quad (4)$$

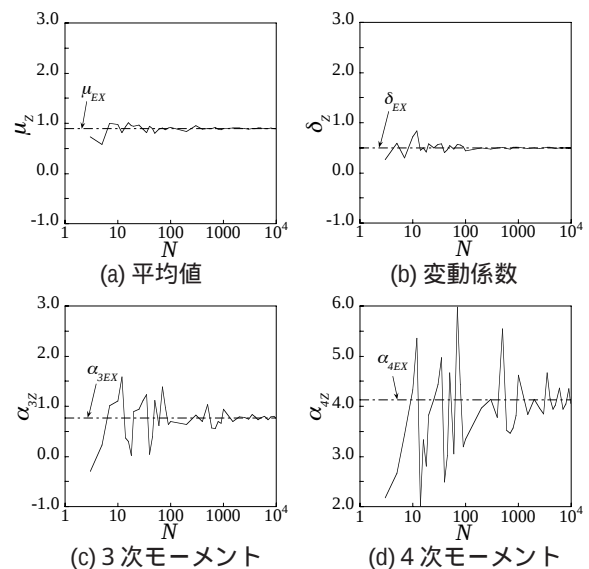


図1 各モーメントのサンプルサイズによる変化

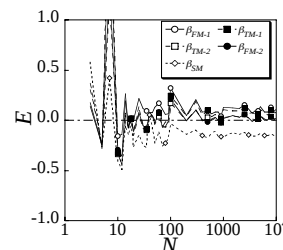


図2 EとNの関係

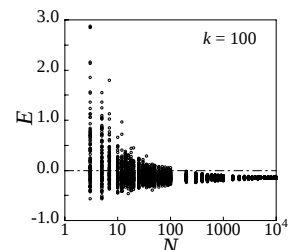


図3 Eのばらつき

表1 信頼性評価手法

手法名	信頼性評価手法
宇賀田の3次モーメント法 ¹⁾	$\beta_{FM-1} = -\frac{1}{2}\xi - \frac{\ln[1-\xi\beta_{SM}]}{\xi}$
小野,井戸田の4次モーメント法 ²⁾³⁾	$\beta_{FM-1} = -\frac{\alpha_{3Z}\mu_Z^2 + 3\alpha_{4Z}\mu_Z\sigma_Z - 3\mu_Z\sigma_Z - \alpha_{3Z}\sigma_Z^2}{(2\alpha_{3Z}^2 - 3\alpha_{4Z} + 3)\sigma_Z^2}$
趙,小野の4次モーメント法 ⁴⁾	$\beta_{FM-2} = \frac{3(\alpha_{4Z}-1)\beta_{SM} + \alpha_{3Z}(\beta_{SM}^2-1)}{\sqrt{(9\alpha_{4Z}-5\alpha_{3Z}^2-9)(\alpha_{4Z}-1)}}$
趙,小野の3次モーメント法 ⁵⁾	$\beta_{FM-2} = \beta_{SM} + \frac{1}{6}\alpha_{3Z}(\beta_{SM}^2-1)$
2次モーメント法	$\beta_{SM} = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z}$

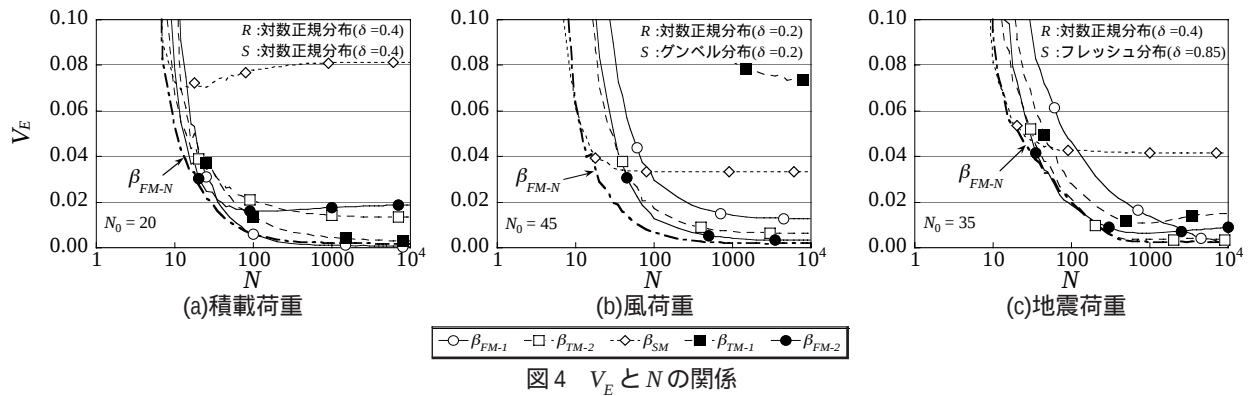


図4 V_E と N の関係

図2に E と N の関係を示す。また、図3は各サンプルサイズのデータを100セット用意し、 β_{SM} における E と N の関係を示したものである。図2,3より、 N による精度を検討するには、各信頼性評価手法が持つ固有の誤差と、十分な数の N が得られていないことによる誤差を両方同時に考慮できる精度の評価尺度が必要になる。そこで、 E の原点回りの分散 V_E を次式のように定義し、これを真値分散と呼び、信頼性評価手法の精度を N との関係で検討する時の誤差の評価尺度とする。

$$V_E = \frac{\sum_{i=1}^k (E_i - 0)^2}{k} \quad (5)$$

ここに、 k は各サンプルのセット数である。

4. 解析精度の考察

建築物の限界状態設計指針⁶⁾から設定した荷重および抵抗強度の確率モデルを基に、各評価手法について1,000回の試行で算出した真値分散 V_E とサンプルサイズ N の関係を図4に示す。

すべての場合において、 N が10程度の非常に小さい時、どの評価手法も V_E が極めて大きい。 N が約20以下の小さい時、確率分布形の違いによらず β_{SM} の精度が安定している。しかし、 N が約20以上では、確率分布形の非正規性を表すことのできる α_{3Z} 、 α_{4Z} が β を求める上で重要になり、これらを考慮した高次モーメント信頼性評価手法の精度が高くなる。ただし、高次モーメントを用いた場合でも、荷重が異なると最適な手法も異なるため、これらの影響を考慮して高次モーメント信頼性評価手法を用いることが重要である。

5. 信頼性評価手法の提案とその考察

N が小さい時は高次モーメント信頼性評価手法の影響を小さく押さえて2次モーメント法の安定した性質を持ち、一方、 N が大きい時には高次モーメント信頼性評価手法の精度の高さを優先させるような評価式として次式を提案する。

$$\beta_{FM-N} = \beta_{SM} + w(\beta_{FM-1} - \beta_{SM}) \quad (6)$$

ここに、 w は N に応じて $[0,1]$ で変化する係数である。

係数 w が持つべき性質は、 V_E と N の関係において2つの評価値が交わる N (以下 N_0) を考慮し、 $N = 0$ の時 $w = 0$ をとり、 N が大きい場合は $w = 1$ に漸近すること

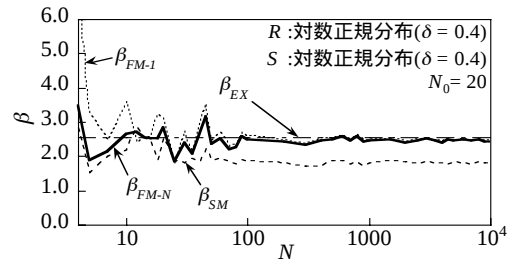


図5 β と N の関係

が必要である。そこで、係数 w を下式で定義する。

$$w = \frac{\tan^{-1} \left\{ \ln \left(\frac{N}{N_0} \right) \right\}}{\pi} + \frac{1}{2} \quad (7)$$

図5に式(6)で計算した β_{FM-N} と N の関係を示す。 N が小さい場合、変動の幅が小さく、大きい場合、精算値に近づいている。 β_{FM-N} による V_E と N の関係を図4(a)に1点鎖線で示す。 β_{FM-N} は N が小さい時は β_{SM} と同等の V_E を示し、 N が大きい時は β_{FM-1} と同等の V_E を示している。つまり、 β_{FM-N} は β_{SM} の安定性と β_{FM-1} の厳密性を兼ね備えている。

また、図4(b),(c)の様に、荷重や変動係数が違う場合でも、式(6)の β_{FM-1} を他の評価手法に置き換えることで、 V_E が小さくなるような β を導き出すことができる。

6. 結論

N が小さい場合、2次モーメント法と同様の安定した精度を持ち、 N が大きい場合は高次モーメント信頼性評価手法と同様の厳密性の高い精度を持つ信頼性評価手法を式(6)で提案し、その有効性を確認した。

本報で提示した、確率モデルや限界状態関数以外にも、今後詳細に検討し、最適な破壊確率評価手法を探索することが必要である。

【参考文献】

- 1) Ugata, T. and Moriyama, K. (1996), " Simple method of evaluating the failure probability of a structure considering the skewness of distribution. " *Nuclear Engineering and Design*, 160, 307-319.
- 2) 小野, 井戸田: 高次モーメント標準化手法の提案とそれに基づく信頼性指標の設定, 学会論文集, No.359, pp.43-49, 1986.1
- 3) 小野, 井戸田: 高次モーメント標準化手法の設計法への展開とその有効性, 学会論文集, No.365, pp.40-47, 1986.7
- 4) 趙, 小野他: 確率モーメントを用いる構造信頼性解析法, その1~3, 東海支部研究報告集, Vol.37, pp.133-144, 1999.2
- 5) 趙, 小野: 構造信頼性解析における3, 4次モーメント法の考察, 学会論文集, No.530, pp.21-28, 2000.4
- 6) 日本建築学会: 建築物の限界状態設計指針, 日本建築学会, 2002